

С. М. БОСЯКОВ, А. В. КРУПОДЕРОВ, АБДУФТАХ ФРХАТ МСЕЛАТИ (ЛИВИЯ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ КОРНЯ ЗУБА В ФОРМЕ КРУГОВОГО ГИПЕРБОЛОИДА

В данной работе представлены результаты нахождения координат центра сопротивления для различных однокоренных зубов. Положение центра сопротивления определяется из условий равновесия корня в периодонтальной связке при действии на зуб сосредоточенной нагрузки. При этом предполагается, что углы поворота корня равны нулю, корень зуба перемещается только поступательно вдоль одной из координатных осей. Расчеты координат центров сопротивления выполнены для однокоренных зубов различной высоты, поперечного сечения и параметра, характеризующего закругление корня.

Проведен анализ влияния высоты костной ткани альвеолярного отростка на значения координаты центра сопротивления. Показано, что при опускании костной ткани центр сопротивления корня смещается вдоль оси зуба к апексу.

Ключевые слова: периодонтальная связка; корень зуба; круговой гиперboloид; центр сопротивления корня зуба; метод конечных элементов; закругление вершины корня; высота костной ткани.

In present paper the results of finding the coordinates of the centre of resistance to various single-root teeth are performed. Position of the centre of resistance is determined by the equilibrium conditions of the root to the periodontal ligament under the action of a concentrated load. It is assumed that the angles of rotation equal to zero root, the root of the tooth moves only along one of the coordinate axes. Coordinates of the centres of resistance calculations are made for single-root teeth of varying heights, cross-section and the rounding parameter of the root.

The influence of the alveolar bone height on the centre of resistance coordinates is study. It is shown that centre of resistance to the root moves along the axis of the tooth to the apex if bone loss.

Key words: periodontal ligament; root of the tooth; circular hyperboloid; centre of resistance; finite element method; rounding of the tooth apex; bone loss.

Один из основных вопросов, рассматриваемых ортодонтией – профилактика и коррекция неправильного прикуса, а также других зубочелюстных аномалий. При этом важной задачей представляется моделирование ортодонтического движения отдельных зубов. Зубы окружены периодонтальной связкой, которая является тонкой мембраной, состоящей из коллагеновых волокон, и обеспечивает прикрепление зуба к окружающей альвеолярной кости. В нормальных условиях контакт между корнем зуба и костной тканью отсутствует. Нагрузка, действующая на коронку зуба, передается на альвеолярную кость посредством деформаций периодонтальной связки. В результате биологического отклика костной ткани альвеолярного отростка возникает ортодонтическое изменение положения зубов [1, 2]. Помимо физико-механических свойств и толщины периодонта, на перемещение зубов после применения ортодонтических нагрузок оказывают влияние длина и форма зуба и уровень костной ткани альвеолярного отростка [3–6]. Также следует учитывать, что для определенного перемещения зубов соответствующим образом должны быть выбраны направление действия силы и ее точка приложения [7]. Применение произвольным образом приложенной и направленной силы приводит к одновременному смещению и повороту зуба. Если линия действия нагрузки проходит через центр сопротивления, связанный с корнем зуба, имеет место только поступательное перемещение [8, 9].

Аналитические подходы к определению положения центра сопротивления, а также результаты исследований напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки, возникающего при перемещениях корня зуба в форме конуса, кругового и эллиптического параболоида представлены в работах [10–13]. Конечно-элементное моделирование перемещений зубов, рассматриваемых как параболоиды, расчеты их центров сопротивления, а также обзор исследований, выполненных в этом направлении, можно найти в работах [14–17]. В то же время форма корня зуба может быть аппроксимирована точнее на основании модели эллиптического гиперboloида [18], поскольку позволяет при заданных размерах поперечного сечения зуба задавать различные значения параметра, характеризующего закругление корня. В данной работе представлены результаты определения центра сопротивления для корня зуба в форме кругового гиперboloида, находящегося в линейно-упругой периодонтальной связке. Проведен сравнительный анализ значений аппликат центра сопротивления, найденных на основании аналитического подхода и конечно-элементного моделирования.

Математическая модель

Внешняя поверхность корня зуба и прилегающая к нему внутренняя поверхность периодонтальной связки (считаем, что корень зуба является абсолютно твердым телом) описывается уравнением кругового гиперboloида

$$F(x, y, z) = y - \frac{h}{\sqrt{1+p^2}-p} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + p^2} - p \right) = 0, \quad (1)$$

где h – высота корня зуба; a – радиус сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня; p – параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба.

Внешняя поверхность периодонтальной связки, прилегающая к костной ткани зубной альвеолы, смещена по нормали по отношению к поверхности корня зуба на величину δ . Ее уравнение имеет вид

$$F_1(x, y, z) = y + n_y \delta - \frac{h}{\sqrt{1+p^2}-p} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{a}(x + n_x \delta)\right)^2 + \left(\frac{1}{a}(z + n_z \delta)\right)^2 + p^2} - p \right) = 0. \quad (2)$$

Здесь n_x, n_y, n_z – компоненты единичного вектора нормали к поверхности (1), которые определяются следующим образом:

$$n_x = -\frac{1}{\Delta} \frac{hx}{a(\sqrt{1+p^2}-p)\sqrt{x^2+z^2+(ap)^2}}, \quad n_y = \frac{1}{\Delta}, \quad n_z = -\frac{1}{\Delta} \frac{hz}{a(\sqrt{1+p^2}-p)\sqrt{x^2+z^2+(ap)^2}},$$

$$\Delta = \sqrt{1 + \frac{h^2(x^2+z^2)}{a^2(\sqrt{1+p^2}-p)((ap)^2+x^2+z^2)}}.$$

Будем считать, что к зубу приложена сосредоточенная сила f_x , линия действия которой параллельна оси Ox . Внешняя поверхность корня является жестко закрепленной. В соответствии с работой [12] будем считать периодонт *несжимаемым* материалом с коэффициентом Пуассона, равным 0,49. Это означает, что при смещении корня зуба к стенке зубной альвеолы периодонт начинает растекаться вокруг поверхности корня зуба. Тогда для любой точки периодонта, прилегающей к поверхности корня зуба, деформации и относительные сдвиги пропорциональны перемещениям точек периодонта вдоль нормали, образующей и направляющей:

$$\varepsilon_{nn} = -\frac{u_n}{\delta}, \quad \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \quad \gamma_{n\theta} = -\frac{u_\theta}{\delta}, \quad \gamma_{nt} = -\frac{u_t}{\delta}, \quad \gamma_{t\theta} = 0.$$

Здесь $u_n = u \cos(\varphi) \sin(\alpha)$ – перемещения точек периодонта вдоль нормали к поверхности корня зуба; $u_t = u \cos(\varphi) \cos(\alpha)$ – перемещения точек периодонта вдоль образующей к поверхности корня зуба; $u_\theta = u \sin(\varphi)$ – перемещения точек периодонта вдоль направляющей к поверхности корня зуба; u – перемещения точек периодонта вдоль оси Ox ; φ – полярный угол; α – угол между образующей к поверхности корня зуба \vec{t} и плоскостью, параллельной плоскости xOz , проходящей через точку P ; δ – ширина периодонтальной связки в направлении нормали к поверхности (1). Нормаль, образующая и направляющая к поверхности корня зуба, а также его геометрические размеры показаны на рис. 1. Сечение корня плоскостью xOy , действующая на корень зуба нагрузка f_x , а также положение центра сопротивления корня A_{cr} , определяемое координатой y_{cr} , представлены на рис. 2.

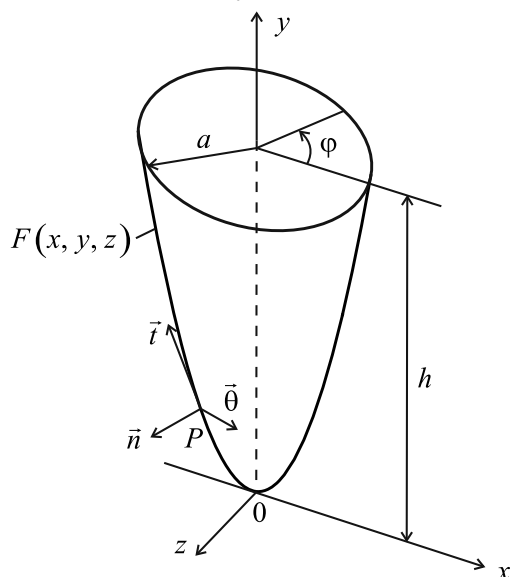


Рис. 1. Корень зуба в форме кругового гиперболоида:
 \vec{n} – нормаль, \vec{t} – образующая, $\vec{\theta}$ – направляющая к поверхности корня зуба, $\vec{\theta}$ – направляющая к поверхности кругового гиперболоида в точке P , φ – полярный угол

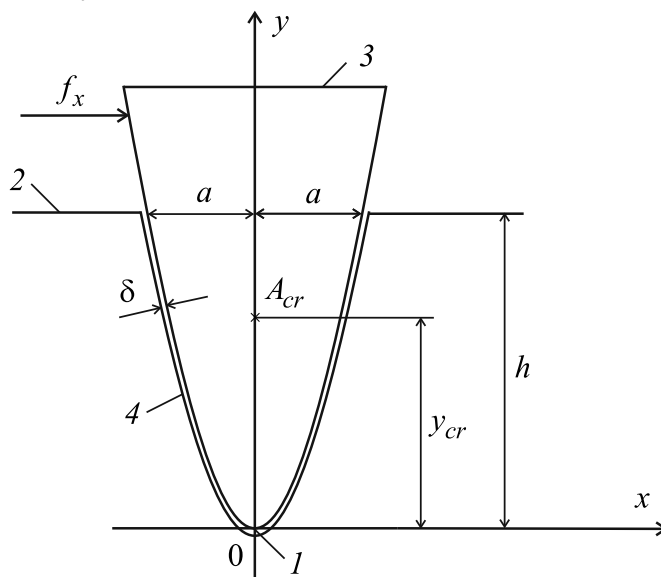


Рис. 2. Сечение корня зуба плоскостью xOy :
 1 – вершина корня зуба (апекс); 2 – альвеолярный гребень;
 3 – корень зуба; 4 – периодонтальная оболочка постоянной толщины δ ;
 A_{cr} – центр сопротивления корня зуба;
 y_{cr} – аппликата центра сопротивления

С учетом уравнения поверхности корня (1) имеем

$$\sin(\alpha) = \frac{h|x|}{\sqrt{a^2 \left(\sqrt{1+p^2} - p \right)^2 \left((ap)^2 + x^2 \right) + (hx)^2}};$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a \left(\sqrt{1+p^2} - p \right) \sqrt{(ap)^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 \left(\sqrt{1+p^2} - p \right)^2 \left((ap)^2 + x^2 \right) + (hx)^2}}.$$

Компоненты тензора деформаций в декартовой системе координат [13]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} & \varepsilon_{nt} & \varepsilon_{n\theta} \\ \varepsilon_{nt} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{n\theta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_1^T \cdot T_2^T, \quad (3)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{nt} = \frac{1}{2} \gamma_{nt}, \quad \varepsilon_{n\theta} = \frac{1}{2} \gamma_{n\theta}.$$

Здесь T_1 – матрица поворота относительно направляющей $\vec{\theta}$ на угол α ; T_2 – матрица поворота от-

носителем оси $0z$ на угол φ ; T_1^T , T_2^T – транспонированные матрицы T_1 и T_2 соответственно.

После преобразований тензоров (3) будем иметь

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{u \sin(\alpha) \cos(\varphi)}{\delta}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{u \cos(\alpha)}{2\delta}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{u \sin(\alpha) \sin(\varphi)}{2\delta}. \quad (4)$$

На основании закона Гука для однородной изотропной среды

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right), \quad \tau_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu}, \quad \tau_{xz} = \frac{E\varepsilon_{xz}}{1+\nu}, \quad \tau_{yz} = \frac{E\varepsilon_{yz}}{1+\nu},$$

где E – модуль упругости периодонтальной связки; ν – коэффициент Пуассона.

С учетом выражений (4) для деформаций компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{xx} = -\frac{Eu(1-\nu)\sin(\alpha)\cos(\varphi)}{\delta(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{Euv\sin(\alpha)\cos(\varphi)}{\delta(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\tau_{xy} = \frac{Eu\cos(\alpha)}{2\delta(1+\nu)}, \quad \tau_{xz} = \frac{Eu\sin(\alpha)\sin(\varphi)}{2\delta(1+\nu)}, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (5)$$

Согласно определению центра сопротивления [12]

$$y_{cr} = \frac{\mu_z}{c_x}. \quad (6)$$

В соотношении (6) μ_z – жесткость периодонтальной связки при повороте корня зуба относительно оси $0z$, c_x – жесткость периодонта при движении корня зуба вдоль оси $0x$, которые являются коэффициентами при перемещении u в следующих уравнениях равновесия:

$$m_z = \iint_F \left(x(\tau_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \tau_{yz}n_z) - y(\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z) \right) dF,$$

$$f_x = \iint_F (\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z) dF, \quad (7)$$

где m_z – момент внешних сил относительно оси $0z$; f_x – внешняя сила, действующая параллельно оси $0x$.

После соответствующих преобразований соотношений (7) с учетом компонент тензора напряжений (5) будем иметь

$$c_x = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)\delta} \iint_F \left(2(1-\nu)n_x \sin(\alpha) \cos(\varphi) + (1-2\nu)(n_y \cos(\varphi) + n_z \sin(\alpha) \sin(\varphi)) \right) dF,$$

$$\mu_z = -\frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)\delta} \iint_F \left(2 \sin(\alpha) (vn_y - yn_x + vn_x) \cos(\varphi) - \right.$$

$$\left. - (1-2\nu) \left((xn_x - yn_y) \cos(\alpha) - yn_z \sin(\alpha) \sin(\varphi) \right) \right) dF.$$

Подставляя жесткости c_x и μ_z в выражение (6), получим отношение, позволяющее выполнить расчет центра сопротивления корня в форме эллиптического гипербоида.

Сравнительный анализ

Для нахождения координат центров сопротивления выполнено численное интегрирование по методу Гаусса – Кронрода для однокоренных зубов верхней и нижней челюсти, геометрические размеры которых приведены в работах [12, 19]. Для всех расчетных случаев толщина периодонтальной связки составляла $\delta = 0,229$ мм; модуль упругости $E = 680$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$ [12].

Параметризованная конечно-элементная модель корня зуба разработана с применением пакетов TetGen и TOCHNOG [20, 21]. Внешняя поверхность корня зуба и внутренняя поверхность периодонтальной связки задавались уравнением (1). На внешней поверхности периодонта, описываемой уравнением (2) и примыкающей к костной ткани зубной альвеолы, задано жесткое закрепление. Количество конечно-элементных узлов модели «корень зуба – периодонт» составляет 67 548, количество конечных элементов – 374 371. Для периодонтальной связки размер конечных элементов равен 0,057 25 мм. Сосредоточенная нагрузка прикладывалась к корню зуба на этапе формирования модели к узлу, находящемуся на оси симметрии корня. Координата y_{fem} центра сопротивления определялась из условия равенства нулю перемещений корня вдоль оси $0y$. Для визуализации перемещений использовался пакет ParaView [22].

Результаты расчетов координат y_{cr} и y_{fem} центров сопротивления, выполненные на основании формулы (6) и конечно-элементной модели для различных зубов верхнего и нижнего зубных рядов, приведены в таблице. Параметр $\delta = \frac{y_{fem} - y_{cr}}{y_{fem}}$ показывает величину отклонения координаты y_{cr} от результатов конечно-элементного расчета.

Координаты центров сопротивления для различных зубов

Зубы верхнего и нижнего зубных рядов		a , мм	h , мм	p	y_{cr} , мм	y_{fem} , мм	δ , %
Верхняя челюсть	Центральный резец [12]	3,9	13,0	0,4	8,694	8,425	4,80
	Центральный резец [19]	3,1	13,6	0,3	8,901	8,686	2,47
	Боковой резец [19]	3,0	12,7	0,1	8,623	8,373	2,98
	Клык [19]	3,5	15,8	0,2	10,454	10,204	2,45
	Первый и второй премоляры [19]	3,3	14,2	0,3	9,310	9,086	2,47
Нижняя челюсть	Центральный и боковой резцы [19]	2,8	12,2	0,1	8,261	8,020 8	2,91
	Клык [19]	2,5	14,4	0,2	9,370	9,151	2,40
	Первый и второй премоляры [19]	3,0	15,5	0,2	10,151	9,921	2,32

Отметим, что в некоторых исследованиях, в частности [13], проводится анализ влияния соотношения между радиусами сечений корня зуба в виде параболоида на напряженно-деформированное состояние периодонтальной оболочки. В дополнение к этому модель корня зуба в виде гиперboloида позволяет учесть влияние закругления корня. Анализ зависимостей координаты y_{cr} центра сопротивления от параметра p , характеризующего закругление корня в апексе, показывает, что для корней зубов, имеющих в апексе геометрическую форму, близкую к конусу с малым углом раствора, координата центра сопротивления удалена на большее расстояние от вершины корня по сравнению с корнями с более закругленной вершиной.

Влияние вертикальной резорбции костной ткани

Уменьшение вертикального уровня костной ткани альвеолярного отростка, т. е. вертикальную атрофию или резорбцию костной ткани, будем учитывать как изменение ширины и высоты корня зуба, соответствующие положению верхушки альвеолярного гребня. В этом случае геометрические параметры корня:

$$a_r = a \sqrt{r(r + 2p(1-r)(\sqrt{1+p^2} - p))}, h_r = hr.$$

Здесь a_r , h_r – радиус сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня и высота корня при вертикальной резорбции, r – параметр, характеризующий высоту костной ткани, связанной с периодонтом ($0 \leq r \leq 1$).

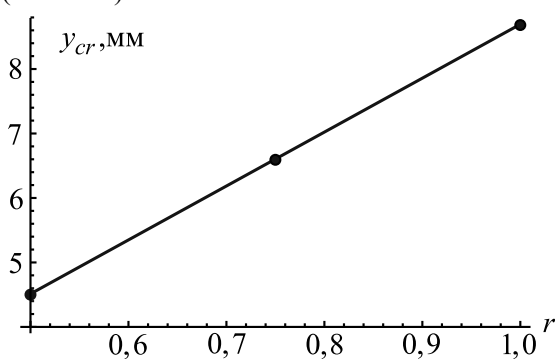


Рис. 3. Зависимость координаты центра сопротивления корня от параметра, характеризующего вертикальную атрофию костной ткани

Зависимость координаты центра сопротивления от параметра, характеризующего вертикальную резорбцию костной ткани, представлена на рис. 3. Выделенные на этом рисунке точки соответствуют отсутствию вертикальной резорбции костной ткани ($r=1$), резорбции 25 % ($r=0,75$) и 50 % ($r=0,5$).

Как следует из рис. 3, зависимость координаты центра сопротивления от высоты костной ткани альвеолярного гребня является линейной зависимостью, которая практически не меняет своего вида при дальнейшем уменьшении параметра r . Это обстоятельство можно использовать при прогнозировании соотношения между сосредоточенной силой и моментом, прикладываемыми к корню зуба для осуществления корпусного перемещения [5, 8].

Предложенная в настоящей работе математическая модель корня зуба в форме кругового гиперboloида, связанного с линейно-упругой периодонтальной связкой, позволяет с высокой точностью прогнозировать положение центра сопротивления для однокоренных зубов. Преимуществом предложенной формы зуба является возможность изменения закругления корня, что дает возможность более точно описать его внешнюю поверхность. Проведенный расчет координат центров сопротивления для раз-

личных корней зубов показал, что при увеличении радиуса сечения корня на уровне альвеолярного гребня (при постоянном значении высоты корня), а также при увеличении параметра, характеризующего закругление корня (при постоянных значениях высоты и радиуса сечения корня), координата центра сопротивления уменьшается. При изменении высоты костной ткани альвеолярного отростка координата центра сопротивления изменяется практически линейно.

Полученные результаты можно использовать для определения величины нагрузки с учетом расчета напряжений и деформаций в периодонте и вертикальной резорбции костной ткани, а также для нахождения соотношения между сосредоточенной силой и моментом, которые необходимы для достижения поступательного движения зуба.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Masella R. S., Meister M. Current concepts in the biology of orthodontic tooth movement // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 2006. Vol. 129, № 4. P. 458–468.
2. Wise G. E., King G. J. Mechanisms of tooth eruption and orthodontic tooth movement // J. Dent. Res. 2008. Vol. 87, № 5. P. 414–434.
3. Cattaneo P. M., Dalstra M., Melsen B. Moment-to-force ratio, center of rotation, and force level: A finite element study predicting their interdependency for simulated orthodontic loading regimens // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 2008. Vol. 133, № 5. P. 681–689.
4. Osipenko M. A., Nyashin M. Y., Nyashin Y. I. Center of resistance and center of rotation of a tooth: the definitions, conditions of existence, properties // Russ. J. Biomech. 1999. Vol. 1, № 1. P. 1–11.
5. Jeon P. D., Turley P. K., Ting Kang. Three-dimensional finite element analysis of stress in the periodontal ligament of the maxillary first molar with simulated bone loss // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 2001. Vol. 119. P. 498–504.
6. Viecilli R. F., Katona T. R., Chen Jie, Hartsfield J. K., Roberts W. E. Jr. Three-dimensional mechanical environment of orthodontic tooth movement and root resorption // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 2008. Vol. 133. P. 791.e11–791.e26.
7. Kojima Yukio, Kawamura Jun, Fukui Hisao. Finite element analysis of the effect of force directions on tooth movement in extraction space closure with miniscrew sliding mechanics // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 2012. Vol. 142. P. 501–508.
8. Haskell B. S., Spencer W. A., Day M. Auxiliary springs in continuous arch treatment: Pt. 1. An analytical study employing the finite-element method // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 1990. Vol. 98, № 5. P. 387–397.
9. Qian Haihong, Chen Jie, Katona T. R. The influence of PDL principal fibers in a 3-dimensional analysis of orthodontic tooth movement // Am. J. Orthod. Dentofac. Orthop. 2001. Vol. 120. P. 272–279.
10. Nikolai R. J., Schweiker J. W. Investigation of root-periodontium interface stresses and displacements for orthodontic application // Experiment. Mech. 1972. Vol. 12, № 9. P. 406–413.
11. Nikolai R. J. Periodontal ligament reaction and displacements of a maxillary central incisor subjected to transverse crown loading // J. Biomech. 1974. Vol. 7. P. 93–99.
12. Provatidis C. G. An analytical model for stress analysis of tooth in translation // Int. J. Eng. Sci. 2001. Vol. 39. P. 1361–1381.
13. Van Schepdael A., Geris L., Vander Sloten J. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement // Med. Eng. Phys. 2013. Vol. 35. P. 403–410.
14. Vollmer D., Bourauel C., Maier K., Jäger A. Determination of the centre of resistance in an upper human canine and idealized tooth model // Eur. J. Orthod. 1999. Vol. 21. P. 633–648.
15. Bourauel C., Vollmer D., Jäger A. Application of bone remodeling theories in the simulation of orthodontic tooth movements // J. Orf. Orthop. 2000. Vol. 61, № 4. P. 266–279.
16. Provatidis C. G. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament // Med. Eng. Phys. 2000. Vol. 22. P. 359–370.
17. Reimann S., Keilig L., Jäger A., Bourauel C. Biomechanical finite-element investigation of the position of the centre of resistance of the upper incisors // Eur. J. Orthod. 2007. Vol. 29. P. 219–224.
18. Наумович С. А., Крушевский А. Е. Биомеханика системы зуб – периодонт. Минск, 2000.
19. Наумович С. А., Батура Р. А., Пархамович С. Н. Антропометрические данные коронок и корней зубов и их значение в стоматологии // Стоматол. журн. 2002. № 2. С. 21–22.
20. TetGen. A Quality Tetrahedral Mesh Generator and a 3D Delaunay Triangulator [Electronic resource] / ed. Hang Si. Mode of access: <http://tetgen.berlios.de/> (date of access: 06.06.2013).
21. TOCHNOG User's manual – a free explicit/implicit FE program [Electronic resource] / ed. Dennis Roddeman. Mode of access: <http://tochnog.sourceforge.net/tnu/tnu.html> (date of access: 06.06.2013).
22. ParaView [Electronic resource] / ed. Kitware, Inc. Mode of access: <http://paraview.org> (date of access: 06.06.2013).

Поступила в редакцию 12.06.13.

Сергей Михайлович Босяков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

Андрей Валентинович Круподеров – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

Абдуфтах Фрхат Мселати – аспирант кафедры теоретической и прикладной механики. Научный руководитель – С. М. Босяков.